Sechster Artikel.

Über die Konstruktionen des regulären Siebzehnecks

von Ermenegildo Daniele in Pavia.

Die Frage der Konstruktion der regulären Polygone oder, was dasselbe ist, der Teilung des Kreises in gleiche Teile wurde im fünften Artikel in allgemeiner Weise behandelt; es gelang dort, auf theoretischem Wege das Kriterium für die Beantwortung der Frage aufzustellen, ob das algebraische Problem der Teilung des Kreises in eine gegebene Zahl gleicher Teile sich auf die Lösung von Gleichungen zweiten Grades zurückführen läßt und ob daher (vgl. Art. IV) die in Betracht kommenden graphischen Konstruktionen die Benutzung keiner anderen Instrumente als des Lineals und des Zirkels erfordern. Der Zweck des vorliegenden Artikels ist, an einem besonderen Falle zu zeigen, wie die dort auseinandergesetzte allgemeine Theorie sich spezialisiert, wie nämlich die Gleichungen zweiten Grades, von denen das Problem abhängt, sich schreiben; und dann, wie man die wirkliche Konstruktion ihrer Wurzeln praktisch ausführen kann. Das Polygon, das wir als Beispiel auswählen wollen, ist das von 17 Seiten, auf dessen Konstruierbarkeit mit Lineal und Zirkel schon im fünften Artikel ausdrücklich hingewiesen worden ist; es ist nach den von den alten Geometern untersuchten regulären Polygonen das einfachste, das sich mit elementaren Mitteln konstruieren läßt, und wir werden einige bekanntere Konstruktionen aus der Zahl derer, die uns besonders charakteristisch erscheinen, darlegen.

I.

§ 1. Lösung der binomischen Gleichung $z^{17} = 1$. Die Gleichung, von der die Teilung des Kreises in 17 gleiche Teile abhängt, ist vom 16ten Grade; sie lautet

$$\frac{z^{17}-1}{z-1} = 0$$

oder

$$z^{16} + z^{15} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0. \tag{1}$$

Bezieht man den Kreis vom Radius 1 auf zwei zueinander rechtwinklige Durchmesser als cartesische Achsen, so werden die Wurzeln dieser Gleichung durch 16 Punkte auf der Peripherie dargestellt sein, die, zusammen mit dem Punkte $z = 1$, die Ecken des einbeschriebenen regulären 17-ecks bilden. Setzt man

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17},$$

so können die Wurzeln von (1) durch die Formel

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{17} + i\sin\frac{2k\pi}{17} \qquad (k = 1, 2, \cdots, 16)$$

dargestellt werden.

Entsprechend dem allgemeinen Verfahren müssen wir damit beginnen, eine Primitivwurzel des Moduls 17 zu wählen; nun ist die kleinste Zahl r, für die $3^r - 1$ durch 17 teilbar ist, wie man leicht nachweist, $r = 16$; die Zahl 3 ist also eine Primitivwurzel für den Modul 17, ja sie ist, wie man erkennen kann, die kleinste. Wir werden dann die Wurzeln von (1) in folgender Weise ordnen:

$$\varepsilon, \varepsilon^3, \varepsilon^{3^2}, \varepsilon^{3^3}, \cdots, \varepsilon^{3^{15}},$$

oder, da $\varepsilon^{17} = 1$ ist:

$$\varepsilon^1, \varepsilon^3, \varepsilon^9, \varepsilon^{10}, \varepsilon^{13}, \varepsilon^5, \varepsilon^{15}, \varepsilon^{11}, \varepsilon^{16}, \varepsilon^{14}, \varepsilon^8, \varepsilon^7, \varepsilon^4, \varepsilon^{12}, \varepsilon^2, \varepsilon^6.$$

In der folgenden Tabelle werden wir darauf die Gaußschen Perioden von 8, 4 und 2 Gliedern hinschreiben:

$$\left.\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{\eta_1 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{11} + \varepsilon^{14} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^6,} \\
\multicolumn{2}{c}{\eta_2 = \varepsilon^1 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^8 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2;} \\
\eta_{11} = \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{12}, & \eta_{12} = \varepsilon^{10} + \varepsilon^{11} + \varepsilon^7 + \varepsilon^6, \\
\eta_{21} = \varepsilon^1 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^4, & \eta_{22} = \varepsilon^9 + \varepsilon^{15} + \varepsilon^8 + \varepsilon^2; \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\eta_{211} = \varepsilon^1 + \varepsilon^{16}, & \eta_{212} = \varepsilon^{13} + \varepsilon^4, \cdots
\end{array}\right\} \tag{A}$$

Man wird sagen können, daß man die algebraische Lösung der Aufgabe erhalten hat, wenn die Perioden von zwei Gliedern berechnet sind. In der Tat sind die ε zu je zweien in der Weise konjugiert imaginär, daß

$$\varepsilon^k + \varepsilon^{17-k} = 2\cos\frac{2k\pi}{17}$$

ist, und das sind gerade die Perioden von zwei Gliedern; jede von

ihnen liefert uns also zwei Winkel, denen zwei zur x-Achse symmetrische Eckpunkte des 17-ecks entsprechen. Auch der geometrische Teil der Aufgabe wird gelöst sein, wenn es gelungen ist, die Perioden von zwei Gliedern zu konstruieren, da dann alles darauf zurückkommt, einen Bogen anzugeben, dessen Kosinus bekannt ist. Die Berechnung der η mit drei Indizes geschieht, indem man nacheinander eine Reihe von Gleichungen zweiten Grades löst, die wir nun aufsuchen wollen und die aus gewissen Relationen zwischen den verschiedenen Perioden der Tabelle (A) hervorgehen.

Wenn man berücksichtigt, wie die η_1 und η_2 sich in den ε ausdrücken, und sich erinnert, daß die ε die Wurzeln von (1) sind, so erhält man

$$\eta_1+\eta_2=\varepsilon^1+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{15}+\varepsilon^{16}=-1,$$

$$\eta_1\,\eta_2=4\,(\varepsilon^1+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{16})=-4;$$

also sind η_1 und η_2 die Wurzeln der Gleichung zweiten Grades

$$\eta^2+\eta-4=0. \tag{2}$$

Ferner ist

$$\eta_{11}+\eta_{12}=\eta_1,\quad \eta_{11}\,\eta_{12}=-1$$

und ebenso

$$\eta_{21}+\eta_{22}=\eta_2,\quad \eta_{21}\,\eta_{22}=-1;$$

also wird man η_{11} und η_{12} als Wurzeln der Gleichung

$$\eta^2-\eta_1\,\eta-1=0 \tag{3}$$

erhalten, während η_{21} und η_{22} die Wurzeln von

$$\eta^2-\eta_2\,\eta-1=0 \tag{4}$$

sein werden.

Endlich bemerken wir die Relationen

$$\eta_{211}+\eta_{212}=\eta_{21},\quad \eta_{211}\,\eta_{212}=\eta_{11};$$

sie zeigen, dass η_{211} und η_{212} die Wurzeln der Gleichung

$$\eta^2-\eta_{21}\,\eta+\eta_{11}=0 \tag{5}$$

sind.

Die Gleichungen (2), (3), (4), (5) sind die Gleichungen zweiten Grades, zu denen wir gelangen wollten. Lösen wir (2) auf, so erhalten wir die Koeffizienten von (3) und (4); die Wurzeln dieser Gleichungen geben uns die Koeffizienten von (5), und diese Gleichung hat zwei der zweigliedrigen Perioden zu Wurzeln. Da eine dieser Wurzeln η_{211} ist und die durch sie gelieferten Punkte $z=\varepsilon^1$ und $z=\varepsilon^{16}$ zusammen mit dem Punkte $z=1$, drei aufeinanderfolgende Eckpunkte des Siebzehnecks bilden, so wird mit der Kenntnis von η_{211}

die Aufgabe als vollkommen gelöst zu betrachten sein. Also genügt die Auflösung von vier Gleichungen zweiten Grades zur Lösung unserer Aufgabe, und man kann noch hinzufügen, daß von den acht Wurzeln, die man dabei erhält, nur fünf für uns Interesse haben, nämlich η_1, η_2, η_{11}, η_{21}, η_{211}; die letzte ist das wirkliche Ziel, das wir zu erlangen suchen, während die vier ersten zu ihrer Bestimmung dienen.

Bevor jedoch der algebraische Teil der Frage als erledigt bezeichnet werden kann, muß noch ein Kriterium angegeben werden, um die beiden Wurzeln jeder der vier Gleichungen zweiten Grades voneinander zu unterscheiden; es ist in der Tat nicht gleichgültig, ob man die eine oder die andere wählt, da jede Wurzel bereits in der Tabelle (A) einen durch ein besonderes ε bestimmten Ausdruck erhielt. Wir setzen zu dem Ende der Kürze wegen:

$$\varepsilon^k + \varepsilon^{17-k} = 2 \cos \frac{2k\pi}{17} = c_k,$$

so daß $c_k = c_{17-k}$ ist. Dann können wir schreiben:

$$\eta_1 = c_3 + c_5 + c_6 + c_7, \quad \eta_2 = c_1 + c_2 + c_4 + c_8;$$

$$\eta_{11} = c_3 + c_5, \quad \eta_{12} = c_6 + c_7, \quad \eta_{21} = c_1 + c_4, \quad \eta_{22} = c_2 + c_8;$$

$$\eta_{211} = c_1, \quad \eta_{212} = c_4.$$

Wir bemerken nun, daß die c_k reelle Grössen sind und daß daher auch alle η reell sind; es werden sich daher ihre Größen miteinander vergleichen lassen, und dies wollen wir auf folgende Weise tun. Man denke (Fig. 70) einen Halbkreis vom Radius 1 durch die Punkte R_0, R_1, R_2, $\cdots$, R_{17} in 17 gleiche Teile geteilt, und man bezeichne mit s_1, s_2, $\cdots$ die Entfernungen R_0R_1, R_0R_2, $\cdots$; aus dem Dreiecke $R_0R_{17}R_k$ folgt, wenn man be-

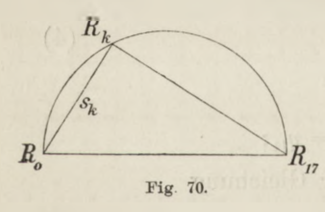


Fig. 70.

merkt, daß $R_0R_{17} = s_{17} = 2$ und $\sphericalangle R_kR_{17}R_0 = \frac{k\pi}{2\cdot 17}$ ist:

$$s_k = 2 \sin \frac{k\pi}{34} \quad (k = 1, 2, \cdots, 17),$$

und da

$$c_k = 2 \cos \frac{2k\pi}{17} = 2 \sin \frac{(17-4k)\pi}{34}$$

ist, so findet man leicht die Gleichungen:

$$c_1 = s_{13}, \quad c_2 = s_9, \quad c_3 = s_5, \quad c_4 = s_1,$$

$$c_5 = -s_3, \quad c_6 = -s_7, \quad c_7 = -s_{11}, \quad c_8 = -s_{15};$$

man wird daher die η durch die s_k ausdrücken können, nämlich in folgender Weise:

$$\left.\begin{array}{c} \eta_1 = s_5 - s_3 - s_7 - s_{11}, \quad \eta_2 = s_1 + s_9 + s_{13} - s_{15}; \\ \eta_{11} = s_5 - s_3, \quad \eta_{12} = - s_7 - s_{11}, \quad \eta_{21} = s_1 + s_{13}, \quad \eta_{22} = s_9 - s_{15}; \\ \eta_{211} = s_{13}, \quad \eta_{212} = s_1. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Nun ist nur noch die Bemerkung nötig, daß die s_k mit wachsendem Index k wachsen, damit ohne weiteres die folgenden Ungleichheiten sich ergeben:

$$\eta_{211} > \eta_{212}; \quad \eta_{11} > 0, \quad \eta_{12} < 0, \quad \eta_{21} > 0, \quad \eta_{22} < 0, \quad \eta_1 < 0; \quad (7)$$

und berücksichtigt man ferner, daß $\eta_1 \eta_2 = -4$ sein muß, so folgt noch

$$\eta_2 > 0. \quad (8)$$

Nun besteht kein Zweifel mehr, wie die Wurzeln unserer vier Gleichungen zweiten Grades zu bezeichnen sind, und wir können sie daher ohne weiteres in die folgende Tabelle einschreiben, in der wir der Einfachheit wegen $\eta_{211} = \zeta_1$ und $\eta_{212} = \zeta_2$ setzen wollen:

$$\left.\begin{array}{ll} \eta_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{2}, & \eta_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ \eta_{11} = \dfrac{\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 + 4}}{2}, & \eta_{12} = \dfrac{\eta_1 - \sqrt{\eta_1^2 + 4}}{2} \\ \eta_{21} = \dfrac{\eta_2 + \sqrt{\eta_2^2 + 4}}{2}, & \eta_{22} = \dfrac{\eta_2 - \sqrt{\eta_2^2 + 4}}{2} \\ \zeta_1 = \dfrac{\eta_{21} + \sqrt{\eta_{21}^2 - 4\eta_{11}}}{2}, & \zeta_2 = \dfrac{\eta_{21} - \sqrt{\eta_{21}^2 - 4\eta_{11}}}{2} \end{array}\right\} \quad (B)$$

II.

Man kennt bis jetzt keine Konstruktion des regulären Siebzehnecks, die aus rein geometrischen Überlegungen hervorgegangen wäre; die Entdecker der verschiedenen Konstruktionen beschränkten sich sämtlich darauf, die Wurzeln der Gleichungen zweiten Grades, die die Frage algebraisch lösen, geometrisch darzustellen.[1]) Um von der Verschiedenartigkeit der Hilfsmittel, mit denen man die uns beschäftigende geometrische Aufgabe behandeln kann, eine Vorstellung zu geben, werden wir drei voneinander sehr verschiedene Lösungen ausführlich darlegen, von denen jede einer besonderen Methode, elementare Aufgaben zu lösen, entspricht.

---

1) Über die Konstruierbarkeit irrationaler Ausdrücke vgl. Art IV.

Die erste gehört dem Typus der Euklidischen Konstruktionen an, wird also mit dem Lineal und dem Zirkel ausgeführt; man verdankt sie im Grunde J. Serret, der sie im zweiten Bande seiner „Algèbre supérieure“ auseinandersetzt, aber in der Form, in der wir sie darbieten, gleicht sie ungefähr der in Bachmanns Buche „Die Lehre von der Kreisteilung“ enthaltenen; es sei bemerkt, dass bei ihr die einzige aus dem Bereiche der echt „elementaren“ Geometrie ein wenig heraustretende Idee die ist, den Strecken einer und derselben Geraden ein Zeichen beizulegen. Die zweite Lösung ist die klassische v. Staudts, die im 24. Bande des Journals für Mathematik (1842) enthalten und auf den Ideen Poncelets und Steiners aufgebaut ist, das will sagen, sie bedient sich nur des Lineals und eines festen Kreises in der Ebene der Figur; v. Staudt publizierte seine Konstruktion, ohne ihr auch nur die Andeutung eines Beweises folgen zu lassen; erst viele Jahre später (1872) wurde die v. Staudtsche Konstruktion von Schröter im 75. Bande desselben Journals für Mathematik erklärt. Der Schrötersche Beweis findet sich fast wörtlich in dem oben zitierten Buche von Bachmann wiedergegeben, wie auch in den „Vorträgen über Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“ von F. Klein, der ihn in einigen Punkten in eleganterer Form darbietet. Diese Modifikationen werden wir bei unserer Darstellung berücksichtigen. Endlich werden wir, gewissermaßen als Gegenstück zu der vorstehenden, eine Konstruktion des regulären 17-ecks angeben, die nur mit dem Zirkel nach der Mascheronischen Methode, von der im II. Artikel eine Vorstellung gegeben wurde, ausgeführt wird; man verdankt sie Gérard, und sie ist ziemlich neu, nämlich erst im Jahre 1897 im 48. Bande der Mathematischen Annalen publiziert worden; sie antwortet gewissermassen auf folgende Bemerkung F. Kleins in den Ausgewählten Fragen (pg. 27, Fußnote): „Eine Konstruktion des 17-ecks nach Mascheroni nur mit dem Zirkel ist noch nicht versucht, obgleich sie jedenfalls möglich ist.“ Noch neuer als die Gérardsche Konstruktion ist eine andere von Güntsche (Arch für Math. und Phys. 3. Reihe 4. Bd. (1903), Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges., pg. 10), die auch nach der Mascheronischen Methode verfährt und, verglichen mit der Gérardschen, einige Vereinfachung zeigt. Da wir uns aber auf Lösungen unserer Aufgabe beschränken wollen, die sich in der Methode wesentlich unterscheiden, so wollen wir die Güntschesche hier nicht auseinandersetzen; diese folgt nämlich, wie man aus der zitierten Abhandlung erkennen kann, mit einer kleinen Abänderung aus einer anderen, mit Lineal und Zirkel ausgeführten Konstruktion.

Die erwähnten Konstruktionen lassen sich alle aus der allgemeinen algebraischen Theorie der Kreisteilung ableiten, und diese Theorie ist nicht von elementarem Charakter. An Versuchen, diese Konstruktionen von den Bestandteilen der höheren Algebra zu befreien, hat es nicht gefehlt, und einer davon, den man A. Padoa (Poligoni regolari di 34 lati; Boll. di Mat. 1903) verdankt, ist glücklich gelungen. Das Neue, das sich in der Padoaschen Arbeit findet, besteht jedoch nicht in der Konstruktion des Polygons, denn diese ist die Serretsche, sondern nur in dem analytischen Verfahren, von dem die Konstruktion abhängt; und wenn bei seiner Methode auch etwas von der Eleganz der allgemeinen Theorie geopfert ist, so hebt sie sich doch in so bemerkenswerter Weise von der klassischen Methode ab, daß wir es für interessant halten, sie kurz wiederzugeben.

§ 2. Die von Bachmann abgeänderte Konstruktion von J. Serret. Auf irgend einer Geraden x (Fig. 71) nehmen wir einen Punkt O beliebig an, und wir wollen übereinkommen, von ihm aus

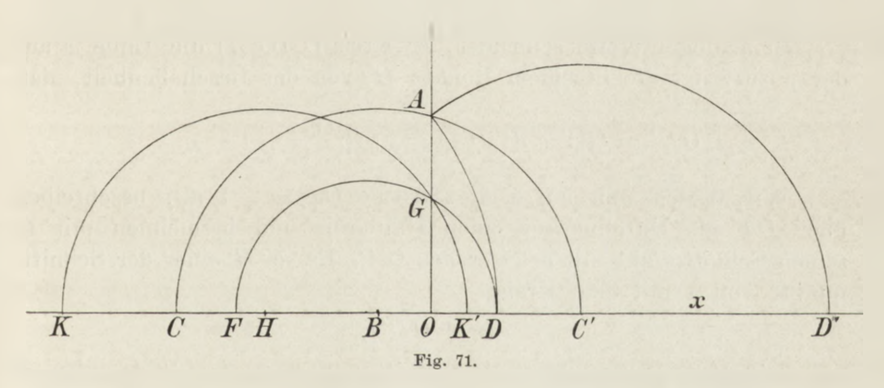


Fig. 71.

die Strecken in einem nach unserem Belieben gewählten Sinne positiv zu nehmen. Wir ziehen durch O die Normale zu x und nehmen auf ihr einen Punkt A so an, daß $OA = 1$ ist, vorausgesetzt, daß das 17-eck in einen Kreis vom Radius 1 einbeschrieben werden soll. Auf x konstruieren wir dann die Strecke

$$OB = -\tfrac{1}{4},$$

und nun schlagen wir den Kreis $B(BA)$; dieser wird x in zwei Punkten C und C' treffen, und aus den ausgeführten Konstruktionen ergibt sich:

$$BA = BC = BC' = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

und, mit dem richtigen Zeichen:

$$OC = OB + BC = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$$

$$OC' = OB + BC' = \frac{-1+\sqrt{17}}{4},$$

oder, nach der Tabelle (B) pg. 175:

$$OC = \frac{\eta_1}{2}, \quad OC' = \frac{\eta_2}{2}.$$

So sind die Wurzeln der Gleichung (2) von pg. 173 konstruiert.

Ferner schneidet der Kreis $C\,(CA)$ die Linie x auf der positiven Seite in einem Punkte D, für den sich ergibt:

$$OD = OC + CD = OC + \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OA}^2} = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\frac{\eta_1^2}{4} + 1},$$

oder, nach der Tabelle (B):

$$OD = \eta_{11}.$$

In analoger Weise schneidet der Kreis $C'\,(C'A)$ die Linie x auf der positiven Seite in einem Punkte D' von der Beschaffenheit, daß

$$OD' = OC' + C'D' = \frac{\eta_2}{2} + \sqrt{\frac{\eta_2^2}{4} + 1} = \eta_{21}.$$

Wir tragen nun auf x die Strecke $OF = -1$ ab, beschreiben über DF als Durchmesser einen Halbkreis und bezeichnen mit G seinen Schnittpunkt mit der Geraden OA. Es sei H einer der Schnittpunkte von x mit dem Kreise

$$G\,(\tfrac{1}{2}\,OD'),$$

und mit K und K' mögen die Schnittpunkte von x mit dem Kreise $H(HG)$ bezeichnet sein; dann ergibt sich aus der Figur:

$$-OK + OK' = KK' = 2\,HG = OD' = \eta_{21},$$

$$-OK \cdot OK' = \overline{OG}^2 = -OF \cdot OD = \eta_{11}.$$

Also sind $-OK$ und OK' die Wurzeln von (5) pg. 173, und sie sind beide positiv, wie es nach (6) pg. 175 sein muß; nimmt man an, daß $-OK > OK'$ ist, so wird nach den Ungleichheiten (7)

$$-OK = \zeta_1, \quad OK' = \zeta_2$$

sein.

Wenn man jetzt OK halbiert, so erhält man die Strecke, die den $\cos \frac{2\pi}{17}$ darstellt, und dann kann man ohne weiteres die Sehne des Bogens $\frac{2\pi}{17}$ erhalten, die die Seite des dem Kreise vom Radius OA einbeschriebenen regulären 17-ecks ist.

Oder, wenn man an Stelle von OK die Strecke OK' nimmt, so erhält man aus (6): $OK' = s_1$, d. h. OK' stellt die Seite des einbeschriebenen regulären 34-ecks vor; werden davon drei aufeinanderfolgende Eckpunkte gezeichnet, so haben wir damit die Seite des 17-ecks.

§ 3. Die Konstruktion von v. Staudt. Bevor wir die von v. Staudt gefundene Konstruktion des regulären 17-ecks auseinandersetzen, wollen wir zeigen, wie nach der Poncelet-Steinerschen Methode die Wurzeln irgend einer Gleichung zweiten Grades

$$x^2 - px + q = 0$$

konstruiert werden.

Es sei ein Kreis geschlagen (Fig. 72), dessen Radius wir zur Einheit nehmen wollen; dann mögen in den diametral einander gegenüberliegenden Punkten O und A die Tangenten x und t gezogen und die Punkte der Ebene auf zwei cartesische Achsen bezogen werden, von denen die Tangente in O die x-Achse sein soll und der Durchmesser OA die y-Achse. Werden mit x_1 und x_2 die Wurzeln der vorgelegten Gleichung bezeichnet, dann gebe man auf der x-Achse die

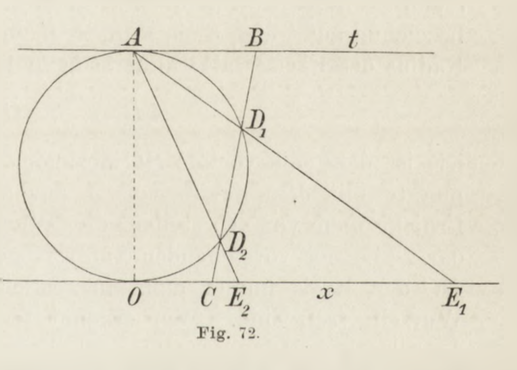


Fig. 72.

Punkte E_1 und E_2, deren Abszissen x_1 und x_2 sind, an; man erhält dann sofort die Gleichungen der Geraden AE_1 und AE_2, nämlich:

$$2x + x_1(y-2) = 0, \quad 2x + x_2(y-2) = 0,$$

und wenn man sie miteinander multipliziert, so erhält man als Gleichung der beiden Geraden:

$$4x^2 + 2(x_1 + x_2)x(y-2) + x_1 x_2 (y-2)^2 = 0$$

oder

$$4x^2 + 2px(y-2) + q(y-2)^2 = 0.$$

Wenn man von dieser Gleichung die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y(y-2) = 0,$$

nachdem man sie mit 4 multipliziert hat, subtrahiert, so erhält man:

$$2\,p\,x\,(y-2)+q\,(y-2)^2-4\,y\,(y-2)=0,$$

und dies ist die Gleichung eines Kegelschnitts, der durch die Schnittpunkte des Kreises mit den Geraden AE_1 und AE_2 hindurchgeht. Nun zerfällt dieser Kegelschnitt in die Gerade $y-2=0$, die nichts anderes als t ist, und in die andere Gerade

$$2\,px+q(y-2)-4\,y=0,$$

die die Verbindungsgerade der Punkte D_1 und D_2 ist, in denen der Kreis außerdem die Geraden AE_1 und AE_2 schneidet. Nennt man B und C die Punkte, in denen die Gerade $D_1\,D_2$ die Geraden t und x schneidet, so wird man deren Abszissen erhalten, wenn man in der letzten Gleichung $y=2$ und $y=0$ setzt; man erhält so

$$AB=\frac{4}{p},\quad OC=\frac{q}{p}.$$

Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion der Wurzeln der Gleichung $x^2-p\,x+q=0$. Man ziehe an einen Kreis in zwei diametral einander gegenüberliegenden Punkten A und O die Tangenten t und x und lege auf ihnen einen und denselben positiven Sinn fest; man bezeichne auf t und x die Punkte B und C von der Art, daß, wenn der Radius des Kreises als Einheit angenommen wird, auch im Vorzeichen

$$AB=\frac{4}{p},\quad OC=\frac{q}{p}$$

ist; ist dann die Gerade BC gezogen, so projiziere man ihre Schnittpunkte mit dem Kreise von A aus auf x: die Entfernungen dieser Projektionen von O stellen die Wurzeln der gegebenen Gleichung dar. Aus der vorstehenden Analysis geht nun hervor, daß die Gerade BC den Kreis immer dann in reellen Punkten schneidet, wenn die Wurzeln reell sind. Man erkennt ferner, daß außer der Abtragung der Strecken AB und OC sich alle anderen Teile der Konstruktion in jedem Falle linear ausführen lassen, vorausgesetzt, daß der Kreis mit seinem Mittelpunkte gegeben ist.

Wir wollen nun diese Konstruktion anwenden, um die Wurzeln der Gleichungen (2), (3), (4), (5) von pg. 173 zu finden.

Inbezug auf (2) haben wir: $p=-1$, $q=-4$. Wir tragen also (Fig. 73) auf der Tangente x die Strecke $OC=4$, d. h. das Doppelte des Durchmessers ab (was man ohne Benutzung des Zirkels tun könnte): die Gerade, die C mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindet, trifft t in dem Punkte von der Abszisse -4, und wenn man daher D_1 und D_2 die Punkte nennt, die dieser Geraden und dem Kreise gemeinsam sind, so treffen die Geraden AD_1 und AD_2

die Gerade x in zwei Punkten E_1 und E_2, deren Abszissen die Wurzeln η_1 und η_2 von (2) darstellen. Wenn von den Punkten E_1 und E_2 der erste derjenige mit negativer Abszisse ist, so ist infolge von (7) und (8)

$$OE_1 = \eta_1, \quad OE_2 = \eta_2.$$

Um die Wurzeln von (3) zu erhalten, muß man auf t den Punkt von der Abszisse $\frac{4}{\eta_1}$ und auf x den von der Abszisse $-\frac{1}{\eta_1}$ angeben. Der erste ist nichts anderes als der Schnittpunkt von t mit der Geraden OD_1. In der Tat, wenn man diesen Punkt B nennt und bemerkt, daß der Winkel AD_1O ein Rechter ist, so ergibt sich, daß die Dreiecke OAB und E_1OA ähnlich sind und zwischen ihren Seiten die Relation

$$AB : AO = OA : OE_1$$

oder

$$AB = \frac{AO^2}{OE_1} = \frac{4}{\eta_1}$$

besteht.

Hinsichtlich des Punktes von der Abszisse $-\frac{1}{\eta_1}$ auf der x-Achse bemerke man, daß die Verbindungsgerade des auf t liegenden Punktes von der Abszisse -4 mit dem Punkte der Geraden x mit der Abszisse 1 den Durchmesser OA in einem Punkte L schneidet, für den sich ergibt:

$$LO : LA = 1 : -4;$$

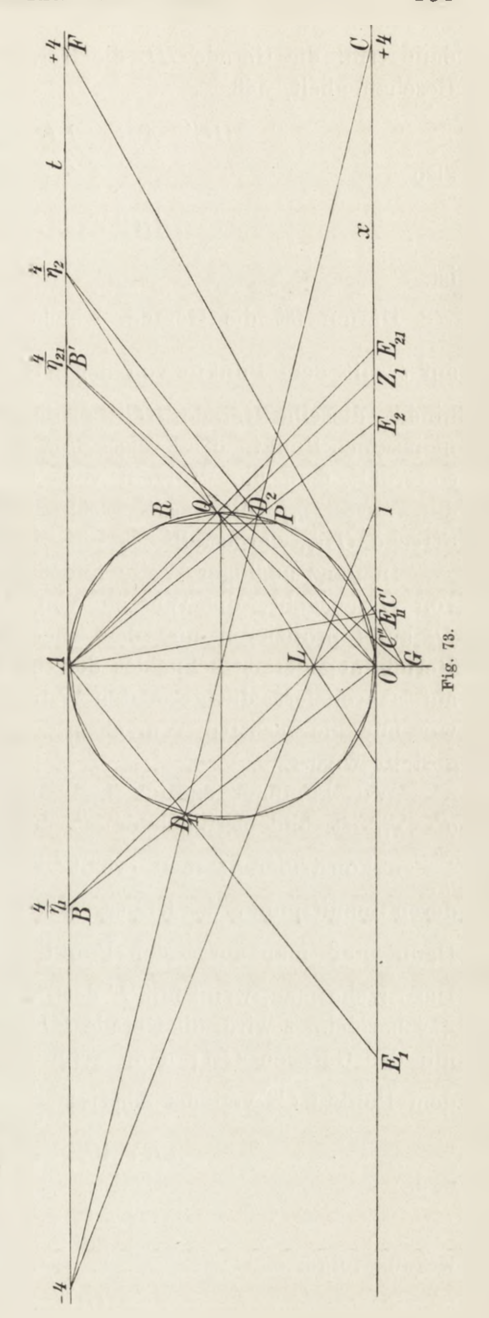


Fig. 73.

dann trifft die Gerade BL die Gerade x in einem Punkte C' von der Beschaffenheit, daß

$$OC' : AB = LO : LA = 1 : -4,$$

also

$$OC' = -\frac{AB}{4} = -\frac{1}{\eta_1}$$

ist.

Darum ist die Gerade, welche den Punkt von der Abszisse $\frac{4}{\eta_1}$ auf t mit dem Punkte von der Abszisse $-\frac{1}{\eta_1}$ auf der x-Achse verbindet, dieselbe Gerade BC'; projiziert man also von A aus die gemeinsamen Punkte des Kreises und der Geraden BC' auf die x-Achse, so erhält man die Wurzeln von (3). Wir beschränken uns darauf, die Wurzel η_{11} (die positiv ist) zu bezeichnen; sie wird durch die Strecke OE_{11} dargestellt.

In ganz analoger Weise findet man, wenn man von D_2 an Stelle von D_1 ausgeht, die Wurzeln von (4). Man wird also von O aus D_2 auf t projizieren und den neuen Punkt mit L verbinden; diese Verbindungsgerade schneidet den Kreis in zwei Punkten, die, von A auf x projiziert, die gesuchten Wurzeln geben. Auch hier konstruieren wir nur die positive Wurzel η_{21}, die durch die Strecke OE_{21} dargestellt wird.

Wir kommen endlich zur Gleichung (5), für welche $p = \eta_{21}$, $q = \eta_{11}$ ist, und beginnen damit, auf t den Punkt B' von der Abszisse $\frac{4}{\eta_{21}}$ zu konstruieren; man erhält ihn, wenn man von O aus den anderen Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden AE_{21} auf t projiziert. Dann muß man auf x den Punkt von der Abszisse $\frac{\eta_{11}}{\eta_{21}}$ konstruieren. Dazu ziehe man, wenn mit F der Punkt der Geraden t von der Abszisse $+4$ bezeichnet wird, die Gerade FE_{11}, und es sei G deren Schnittpunkt mit der Geraden OA; dann trifft die Gerade GB' die Gerade x in dem Punkte C'' von der Abszisse $\frac{\eta_{11}}{\eta_{21}}$. In der Tat ist:

$$AF : AB' = OE_{11} : OC'',$$

d. h.:

$$4 : \frac{4}{\eta_{21}} = \eta_{11} : OC'',$$

woraus folgt:

$$OC'' = \frac{\eta_{11}}{\eta_{21}}.$$

Man wird also die Wurzeln ζ_1 und ζ_2 von (5) erhalten, wenn man von A aus die gemeinsamen Punkte des Kreises und der Geraden $B'C''$ auf x projiziert. Wenn Z_1 der Punkt ist, der der Wurzel ζ_1 entspricht, so trifft die Gerade AZ_1 den zur x-Achse parallelen Durchmesser des Kreises in einem Punkte, dessen Abszisse $\cos\frac{2\pi}{17}$ ist; sind dann P und R die Schnittpunkte der in diesem Punkte zur x-Achse normal gezogenen Sehne mit dem Kreise und ist Q der Punkt mit positiver Abszisse, in dem der Kreis selbst von dem genannten Durchmesser geschnitten wird, so sind P, Q und R drei aufeinanderfolgende Punkte des einbeschriebenen regulären 17-ecks.[1])

§ 4. Die Konstruktion von Gérard. Wir machen in der Gleichung (2) pg. 173 die Transformation $\eta = 2\xi$ und nennen ξ_1 und ξ_2 die Wurzeln der transformierten Gleichung; führen wir dann die ξ an Stelle der η in den Formeln der Tabelle (B) ein, dann verwandeln sich diese in die folgenden:

$$\xi_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \quad \xi_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4},$$

$$\eta_{11} = \xi_1 + \sqrt{\xi_1^2+1}, \quad \eta_{21} = \xi_2 + \sqrt{\xi_2^2+1},$$

$$\zeta_1 = \frac{\eta_{21} + \sqrt{\eta_{21}^2 - 4\eta_{11}}}{2};$$

wir haben hierbei nur die fünf Wurzeln, die wir brauchen, hingeschrieben.

Es sei nun O der Mittelpunkt des Kreises vom Radius 1 (Fig. 74), in den man das reguläre 17-eck einbeschreiben will. Man bezeichne auf ihm die Punkte A, B, C, D, Eckpunkte eines regulären Sechsecks, konstruiere darauf den Mittelpunkt M der Strecke OA (nach Art. II, § 4), und bestimme auch den Punkt X, in dem sich die Kreise $A(AC)$ und $D(AC)$ schneiden. Da $OX = \sqrt{2}$ ist (Art. II, § 4), so schneidet der Kreis $A(OX)$ den gegebenen in zwei Punkten F und F' von der Art, daß das Viereck $AF'DF$ ein Quadrat ist. Wir nehmen die Geraden OD und OF als x-Achse und y-Achse an und suchen, wie es auch bei den vorhergehenden Methoden geschehen ist, diejenigen Punkte zu konstruieren, deren Abszissen ξ_1, ξ_2, η_{11}, η_{21} und ζ_1 sind.

1) In einer in den Math. Annalen (VI, 1873) veröffentlichten Notiz zeigt Herr Affolter, daß die oben angegebene v. Staudtsche Konstruktion für das 17-eck sich auf alle regulären Polygone, die mit Lineal und Zirkel konstruierbar sind, ausdehnen läßt, und er legt die Konstruktionen, die sich auf das Polygon von 257 Seiten bezieht, näher dar.

Die Punkte K und K', in denen sich die Kreise $O(1)$ und $M(1)$ schneiden, haben beide zur Abszisse $-\frac{1}{4}$, und zu Ordinaten

$$\pm\sqrt{1-\tfrac{1}{16}};$$

die Kreise $K(OX)$ und $K'(OX)$ schneiden sich dann in zwei Punkten E_1 und E_2 der x-Achse, deren Abszissen

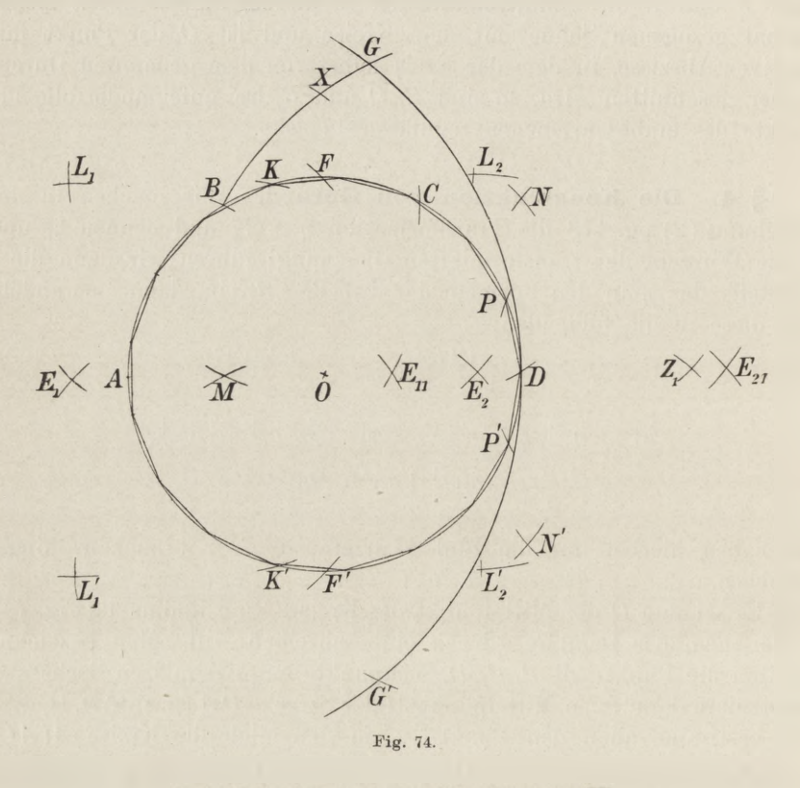


Fig. 74.

$$-\tfrac{1}{4}-\sqrt{2-(1-\tfrac{1}{16})}=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$$

und

$$\frac{-1+\sqrt{17}}{4},$$

d. h. ξ_1 und ξ_2 sind.

Ferner schneidet der Kreis $E_1(1)$ die Kreise $F(\xi_1)$ und $F'(\xi_1)$ in den beiden Punkten L_1 und L_1', die dieselbe Abszisse ξ_1 und zu Ordinaten ± 1 haben, und die Kreise

$$L_1(E_1X=\sqrt{\xi_1^2+2}) \text{ und } L_1'(E_1X)$$

treffen sich auf der x-Achse in einem Punkte E_{11} von der Abszisse

$$OE_{11} = OE_1 + E_1 E_{11}$$

$$= OE_1 + \sqrt{L_1 E_{11}^2 - L_1 E_1^2} = \xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 + 1} = \eta_{11}.$$

In analoger Weise schneidet der Kreis $E_2(1)$ die Kreise $F(\xi_2)$ und $F'(\xi_2)$ in den beiden Punkten L_2 und L_2' von der Abszisse ξ_2 und den Ordinaten ± 1, und die Kreise $L_2(E_2 X)$ und $L_2'(E_2 X)$ bestimmen auf der x-Achse einen Punkt E_{21} von der Abszisse η_{21}.

Endlich konstruiere man die Punkte N und N', in denen sich die Kreise $O(AE_{11})$ und $E_{21}(AE_{11})$ schneiden; sie haben zur Abszisse $\frac{1}{2}\eta_{21}$ und zu Ordinaten

$$\pm\sqrt{ON^2 - \tfrac{1}{4}\eta_{21}^2} = \pm\sqrt{(\eta_{11}+1)^2 - \tfrac{1}{4}\eta_{21}^2};$$

dann bestimmen die Kreise $N(E_{11}B)$ und $N'(E_{11}B)$ auf der x-Achse einen Punkt Z_1 von der Abszisse ζ_1. In der Tat haben wir:

$$NZ_1 = N'Z_1 = E_{11}B =$$

$$\sqrt{ME_{11}^2 + MB^2} = \sqrt{(\eta_{11} + \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}} = \sqrt{\eta_{11}^2 + \eta_{11} + 1};$$

daher ist

$$OZ_1 = \tfrac{1}{2}\eta_{21} + \sqrt{NZ_1^2 - \left(\frac{NN'}{2}\right)^2} =$$

$$\tfrac{1}{2}\eta_{21} + \sqrt{\eta_{11}^2 + \eta_{11} + 1 - (\eta_{11}+1)^2 + \tfrac{1}{4}\eta_{11}^2} =$$

$$\tfrac{1}{2}\eta_{21} + \sqrt{\tfrac{1}{4}\eta_{21}^2 - \eta_{11}} = \zeta_1.$$

Und da nun

$$\zeta_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17}$$

ist, so werden wir nur den Kreis $O(1)$ mit dem Kreise $Z_1(1)$ zu schneiden haben, um zwei Punkte P und P' zu erhalten, die zusammen mit D drei aufeinanderfolgende Eckpunkte des 17-ecks bilden.

§ 5. Methode von A. Padoa zur Berechnung der Seite des regulären Polygons von 34 Seiten. Wenn ein Kreisbogen $\frac{m}{n}$ des Kreisumfanges ist, so wollen wir mit $l_{m,n}$ das Maß der zu ihm gehörigen Sehne im Verhältnis zum Radius bezeichnen; im besondern ist $l_{1,n}$ das Maß der Seite des einbeschriebenen konvexen regulären Polygons von n Seiten.

Da zu einer und derselben Sehne die Bogen $\frac{m}{n}$ und $\frac{n-m}{n}$ des Kreisumfanges gehören, so ist

$$l_{m,n} = l_{n-m,n},$$

und da ferner für jedes h $\frac{m}{n} = \frac{mh}{nh}$ ist, so ist auch

$$l_{m,n} = l_{mh,nh}.$$

Wir setzen nun voraus, n sei gerade und $m < \frac{n}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{m}{n} < \frac{1}{2}\right)$. Betrachten wir dann die Bogen $\frac{m}{n}$ und $\frac{\frac{n}{2}-m}{n}$ des Kreisumfangs, deren Summe gleich dem halben Kreisumfang ist und deren Sehnen $l_{m,n}$ und $l_{\frac{n}{2}-m,n}$ die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden, dessen Hypotenuse gleich 2 ist, so folgt:

$$l_{\frac{n}{2}-m,n} = \sqrt{4 - l_{m,n}^2} \tag{9}$$

$$l_{m,n}\sqrt{4 - l_{m,n}^2} = l_{2m,n}. \tag{9'}$$

Die letzte dieser Gleichungen kann man auch schreiben:

$$(2 - l_{m,n}^2)^2 = 4 - l_{2m,n}^2,$$

und da $l_{1,4} = \sqrt{2}$ ist so sieht man, daß man nehmen muß:

$$2 - l_{m,n}^2 = \pm\sqrt{4 - l_{2m,n}^2}, \text{ je nachdem } \frac{m}{n} \lessgtr \frac{1}{4} \text{ ist.} \tag{10}$$

Nun setzen wir:

$$x_1 = 2 - l_{1,17}^2, \quad x_2 = 2 - l_{2,17}^2, \quad x_3 = 2 - l_{4,17}^2, \quad x_4 = 2 - l_{8,17}^2;$$

dann können infolge der Gleichungen (9) und (10) die x_1, x_2, x_3, x_4 auch in folgende Form gebracht werden:

$$x_1 = l_{13,34}, \quad x_2 = l_{9,34}, \quad x_3 = l_{1,34}, \quad x_4 = -l_{15,34}. \tag{11}$$

Mit Hilfe von (9′) erhalten wir:

$$(x_1+2)(x_2+2)(x_3+2)(x_4+2) = 1, \tag{12}$$

während die Gleichung (10) ergibt:

$$x_1^2 = x_2 + 2, \quad x_2^2 = x_3 + 2, \quad x_3^2 = x_4 + 2, \quad x_4^2 = x_1 + 2, \tag{12'}$$

und aus diesen Gleichungen folgt unter Berücksichtigung der Zeichen in (11):

$$x_1x_2x_3x_4 = -1, \quad (x_1^2-2)(x_2^2-2)(x_3^2-2)(x_4^2-2) = -1. \tag{13}$$

Wir setzen nun

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 &= b \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots &= c; \end{aligned}\right| \tag{14}$$

dann sind die x_i die Wurzeln der Gleichung vierten Grades

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx = 1, \tag{14'}$$

und zwischen den a, b, c und den x_i bestehen die Identitäten;

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= a^2 - 2b \\ x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + \cdots &= b^2 - 2ac - 2 \\ x_1^2x_2^2x_3^2 + \cdots &= c^2 + 2b. \end{aligned}\right| \tag{15}$$

Die Relationen zwischen den x_i lassen sich mit Hilfe von (14) und (15) in Relationen zwischen a, b, c umwandeln, und auf diese Weise finden wir durch ganz elementare Rechnungen aus (12), (12') und (13) unter anderem:

$$(c^2 + 4c - 13)(c^2 - 4c + 3) = 0.$$

Aus (11) ergibt sich, daß

$$x_1 > x_2 > x_3 > 0 > x_4$$

$$x_3 + x_4 < 0,$$

also

$$c < 0 \tag{16}$$

ist: daher kann nicht $c^2 - 4c + 3 = 0$ sein, also muß

$$c^2 + 4c - 13 = 0$$

sein, und diese Gleichung hat die Wurzeln

$$-2 + \sqrt{17} \quad \text{und} \quad -2 - \sqrt{17}.$$

Da die erste wegen (16) nicht annehmbar ist, so bleibt für c der Wert übrig:

$$c = -2 - \sqrt{17}.$$

Dann findet man leicht die Werte von a und b, nämlich:

$$a = -\tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17}), \quad b = -\tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{17}).$$

Die Gleichung vierten Grades, die die x_i zu Wurzeln hat, heißt also:

$$x^4 + \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17})\,x^3 - \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{17})\,x^2 + (2 + \sqrt{17})\,x - 1 = 0,$$

und diese Gleichung zerfällt in die folgenden beiden vom zweiten Grade:

$$\left.\begin{array}{l} 4x^2 + \left\{1 - \sqrt{17} + \sqrt{2(17 - \sqrt{17})}\right\}x \\ \quad - \left\{1 + \sqrt{17} + \sqrt{2(17 + \sqrt{17})}\right\} \end{array}\right\} = 0 \qquad (17)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x^2 + \left\{1 - \sqrt{17} - \sqrt{2(17 - \sqrt{17})}\right\}x \\ \quad - \left\{1 + \sqrt{17} - \sqrt{2(17 + \sqrt{17})}\right\} \end{array}\right\} = 0. \qquad (18)$$

In (17) ist das Produkt der Wurzeln negativ; also muß eine Wurzel dieser Gleichung x_4 sein. Andererseits muß x_3 eine Wurzel von (18) sein; denn, wenn dies nicht der Fall wäre, so müßten x_1 und x_2 die Wurzeln von (18) sein, und dies ist unmöglich, weil $x_1 x_2 > 2$ ist, während das Produkt der Wurzeln von (18) kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. x_3 ist also eine Wurzel von (18), und zwar die kleinere. Setzt man daher

$$-p = 1 - \sqrt{17} - \sqrt{2(17 - \sqrt{17})}$$

$$-q = 1 + \sqrt{17} - \sqrt{2(17 + \sqrt{17})},$$

so folgt:

$$x_3 = l_{1,34} = \tfrac{1}{8}\left(p - \sqrt{p^2 - 16q}\right),$$

und dies ist das Maß der Seite des einbeschriebenen regulären Polygons von 34 Seiten.

Hinsichtlich der Details der Rechnung und des Ergebnisses der Serretschen Konstruktion aus der Formel für $l_{1,34}$ verweisen wir auf den Aufsatz von Padoa. Wir wollen nur noch mit Padoa bemerken, daß man die Rechnung so führen kann, daß ihr trotz des Vorhandenseins der Gleichung vierten Grades (14') der elementare Charakter gewahrt bleibt, da man entweder die Identität (15) oder die Eigenschaft, daß die x_1, x_2, x_3, x_4 die Wurzeln von (14') sind, direkt beweisen kann.

bis zu ihnen zurückgelegt hat, und es bleibt ihnen ihre innigere Berührung mit der Form, in der die praktischen Aufgaben gewöhnlich auftreten. Daher wollen wir von dem, was die alten Geometer uns gelehrt haben, nichts beiseite legen und wenden uns an eine breitere und höhere wissenschaftliche Ausbildung nur, um uns die Verhältnisse jener elementaren Geometrie klar zu machen, deren bewundernswerte Einzelheiten sehr wohl dem Glanze der modernen allgemeinen Begriffe entsprechen.

Berichtigungen.

S. 42, Z. 21 v. o. statt anM lies Man
S. 98, Z. 16 v. u. statt ; lies :
S. 112, Z. 3 v. u. und S. 113, Z. 3 v. o. statt $\frac{O}{O}\frac{M}{E}$ lies $\frac{OM}{OE}$
S. 113, Z. 11 v. o. statt $\frac{X'}{O'}\frac{E'}{E'}$ lies $\frac{X'E'}{O'E'}$
S. 117, Z. 15 v. o. statt $\frac{O'}{O'}\frac{M_x}{E_x}$ lies $\frac{OM_x}{OE_x}$
S. 120, Z. 1 v. u. statt Beziehnng lies Beziehung
S. 140, Z. 3 v. o. statt im § 9 lies in den §§ 8—10
S. 181, Z. 5 v. u. statt mit der Abszisse lies von der Abszisse
S. 270, Z. 8 v. u. statt arithmetich lies arithmetisch
S. 308, Z. 14 v. o. statt algebraischen lies algebraischer
S. 319, Z. 11 v. u. statt $\gamma_{n-1}{}^{(n-1)!} + \cdots + \gamma_1{}^{1!}$ lies $\gamma_{n-1}(n-1)! + \cdots + \gamma_1 1!$

